Matrices y determinantes (enero 2010)

MATRICES

- Matriz es todo conjunto de número o expresiones dispuestos en forma rectangular formando filas y columnas.
- Cada uno de los números de que consta la matriz se denomina **ELEMENTO**. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la **FILA** y la **COLUMNA** a la que pertenece.
- El número de filas y columnas de una matriz se denomina **DIMENSIÓN** de una matriz.
- El conjunto de matrices de m filas y n columnas se denota por $\mathbf{A_{mxn}}$ o $\mathbf{(a_{ij})}$, y un elemento cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila i y en la columna j, por $\mathbf{a_{ij}}$.
- Dos **MATRICES** son **IGUALES** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.
- **Matriz fila:** Es una matriz constituida por una sola fila.
- **Matriz columna:** Es una matriz con una sola columna.
- **Matriz rectangular:** Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su dimensión mxn.
- **Matriz cuadrada:**La que tiene el mismo número de filas que de columnas. Los elementos de la forma $\mathbf{a}_{ii}$ constituyen la **DIAGONAL PRINCIPAL**. La **DIAGONAL SECUNDARIA** la forman los elementos con **i+j=n+1**.
- **Matriz nula:** Todos los elementos son nulos.
- **Matriz triangular superior:** Los elementos situados por debajo de la diagonal principal son 0.
- **Matriz triangular inferior:** Los elementos situados por encima de la diagonal principal son 0.
- **Matriz diagonal:** Todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.
- **Matriz escalar:** Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.
- **Matriz identidad o unidad:**Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.
- **Matriz traspuesta:** Dada una matriz A, se llama traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas.
  - $\mathbf{(A^t)^t = A}$
  - $\mathbf{(A + B)^t = A^t + B^t}$
  - $\mathbf{(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t}$
  - $\mathbf{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$
- **Matriz regular:** Es aquella matriz cuadrada que tiene inversa.
- **Matriz singular:** Es aquella que no tiene matriz inversa.
- **Matriz idempotente:**Si $\mathbf{A^2 = A}$.
- **Matriz involutiva:** Si $\mathbf{A^2 = I}$.
- **Matriz simétrica:** Es aquella matriz cuadrada que verifica: $\mathbf{A=A^t}$.
- **Matriz antisimétrica o hemisimétrica:** Es aquella matriz cuadrada que verifica: $\mathbf{A=-A^t}$.
- **Matriz ortogonal:** Si verifica: $\mathbf{A \cdot A^t = I}$
- **SUMA DE MATRICES**
  - Dadas dos matrices de la misma dimensión, $\mathbf{A=(a_{ij})}$ y $\mathbf{B=(b_{ij})}$, se define la matriz suma como: $\mathbf{A+B=(a_{ij}+b_{ij})}$. Es decir, aquella matriz cuyos elementos se obtienen: sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma misma posición.
  - **Asociativa:** $\mathbf{A + (B + C) = (A + B) + C}$
  - **Elemento neutro:** $\mathbf{A + 0 = A}$
  - **Elemento opuesto:**$\mathbf{A + (-A) = O}$
  - **Conmutativa:** $\mathbf{A + B = B + A}$
- Producto de un escalar una matriz: dada una matriz $\mathbf{A=(a_{ij})}$ y un número real $\mathbf{k \in R}$, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k. $\mathbf{kA=(k\,a_{ij})}$
  - $\mathbf{a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A}$ $A \in M_{mxn}$, a, b $\in \mathbb{R}$
  - $\mathbf{a \cdot (A+B) = a \cdot A + a \cdot B}$ A,B $\in M_{mxn}$, a $\in \mathbb{R}$
  - $\mathbf{(a+b) \cdot A = a \cdot A+b \cdot A}$ $A \in M_{mxn}$, a, b $\in \mathbb{R}$
  - $\mathbf{1 \cdot A = A}$ $A \in M_{mxn}$
- Producto de matrices: Dos **MATRICES** A y B se dicen **MULTIPLICABLES** si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.
  - $\mathbf{M_{m\,x\,n} \; x \; M_{n\,x\,p} = M_{\,m\,x\,p}}$
  - El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.
  - **Asociativa:** $\mathbf{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$

- **Elemento neutro: $A \cdot I = A$**
- **No es Conmutativa: $A \cdot B \neq B \cdot A$**
- **Distributiva del producto respecto de la suma: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$**

- **Matriz inversa** $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
  - $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
  - $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$
  - Cálculo de una matriz inversa aplicando su definición (por ecuaciones).
  - Cálculo por el método de Gauss.
    - Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como $\mathbf{A^{-1}}$, seguiremos los siguientes pasos:
    - **1º** Construir una matriz del tipo **M = (A | I)** esto es, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad **I** en la derecha.
    - **2º** Utilizando el método Gauss se transforma la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}

- **Rango de una matriz**
  - **RANGO DE UNA MATRIZ**: es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes.
  - Una línea es **LINEALMENTE DEPENDIENTE** de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.
  - Una línea es **LINEALMENTE INDEPENDIENTE** de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.
  - El rango de una matriz A se simboliza: **rang(A)** o **r(A)**.
  - **Cálculo por el método de Gauss.**
    - Podemos descartar una línea si:
      - Todos los coeficientes son ceros.
      - Hay dos líneas iguales.
      - Una línea es proporcional a otra.
      - Una línea es combinación lineal de otras.

- **Ecuaciones matriciales**
  - Utilizar el método de la matriz inversa.

DETERMINANTES

- A cada **matriz cuadrada A** se le asigna **un escalar** particular denominado **determinante de A** , denotado por **|A|** o por **det (A)**.
- Determinante de orden uno
  - $|a_{11}| = a_{11}$
- Determinante de orden dos
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$
- Determinante de orden tres

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

- Regla de Sarrus
  - Los términos con **signo +** están formados por los elementos de la **diagonal principal** y los de las **diagonales paralelas** con su correspondiente **vértice opuesto**.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

  - Los términos con **signo -** están formados por los elementos de la **diagonal secundaria** y los de las **diagonales paralelas** con su correspondiente **vértice opuesto**.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

  - Menor complementario **Se llama** menor complementario **de un elemento** a_{ij} **al valor del determinante de orden n-1 que** se obtiene al suprimir en la matriz la fila i y la columna j**.**
  - Adjunto **Se llama** adjunto **del elemento** a_{ij} **al menor complementario anteponiendo:**
    - El signo es + si i+j es par.
    - El signo es - si i+j es impar.
    - El valor de un determinante es igual a la suma de productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes:
- Determinante de orden superior a tres**:** consiste en conseguir que una de las líneas del determinante esté formada por elementos nulos, menos uno: el **elemento base o pivote**, que valdrá 1 ó -1 .
  - Seguiremos los siguientes pasos:
  - **1.**Si algún **elemento** del determinante vale la **unidad**, se elige una de las dos líneas: la **fila o la columna**, que contienen a dicho elemento (se debe escoger aquella que contenga el **mayor número posible de elementos nulos**).
  - **2.**En caso negativo:
  - Nos fijamos en una línea que contenga el **mayor número posible de elementos nulos** y **operaremos** para que uno de los **elementos de esa línea sea un 1 ó -1** (operando con alguna línea paralela).
  - **2.Dividiendo la línea por uno de sus elementos**, por lo cual deberíamos multiplicar el determinante por dicho elemento para que su valor no varie. Es decir sacamos factor común en una línea de uno de sus elementos.
  - **3.**Tomando como referencia el **elemento base**, **operaremos** de modo que **todos los elementos de la fila o columna**, donde se encuentre, **sean ceros**.
  - **4.**Tomamos el **adjunto del elemento base**, con lo que obtenemos un **determinante de orden inferior** en una unidad al original.
- Propiedades de los determinantes
  - **1.** $|A^t| = |A|$

- **2. |A|=0 Si:**
    - Posee dos **líneas iguales**
    - Todos los **elementos** de una línea son **nulos**.
    - Los elementos de una línea son **combinación lineal** de las otras.
- **3.** Un determinante **triangular** es igual al **producto de los elementos de la diagonal principal.**.
- **4.** Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas paralelas su determinante cambia de signo.
- **5.** Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra paralela multiplicados previamente por un nº real el valor del determinante no varía.
- **6.** Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier línea, pero sólo una.
- **7.** Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes.
- **8. |A·B| =|A|·|B|**

- Matriz inversa
    - La matriz inversa si existe es única.
    - Si la matriz tiene un determinante distinto de cero existe inversa, si su determinante es cero no tiene inversa.
    - Si una matriz no tiene inversa su determinante es cero, y si tiene inversa su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^*\right)^t$$

- Rango de una matriz El rango es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula (determinante igual a cero)**.**
    - Si el rango de una matriz es k, entonces todos los menores de orden superior a k son nulos.
    - Si el rango de una matriz es k, las k filas y k columnas que forman el menor de orden k, son linealmente independientes y se llaman línea principales.
    - Las líneas no principales dependen de las líneas principales.

SISTEMA DE ECUACIONES

- Teorema de Rouche-Fröbenius:
  - La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada sean iguales .
    - R = R' Sistema Compatible.
      - R = R'= N Sistema Compatible Determinado.
      - R = R'≠ N Sistema Compatible Indeterminado.
    - R ≠ R' Sistema Incompatible.
  - Si un sistema de m ecuaciones y n incógnitas tiene todos los términos independientes nulos se dice que es HOMOGÉNEO.
  - Sólo admite la SOLUCIÓN TRIVIAL: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
  - La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el nº de incógnitas, o dicho de otra forma, que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.
- Cálculo del rango por el método de Orlar el menor.
  - Dado un menor, podemos formar otros menores de orden superior añadiendo elementos de otra fila y otra columna cualesquiera.
  - Vamos calculando determinantes hasta que conseguimos uno distinto de cero, entonces pasamos a formar menores de orden mayor.
- Método de Gauss para resolver sistemas:
  - Transformamos la matriz ampliada, mediante operaciones elementales por filas, en una matriz escalonada
  - Sistema incompatible (sin solución)- (una fila con todo ceros menos el término independiente.
  - Sistema compatible determinado (una solución)- (una fila con todo ceros excepto una variable).
  - Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) (una fila con todo ceros). Las soluciones se ponen en función de un parámetro.
- Regla de Cramer:
  - Mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes debe de ser distinto de cero (tener una única solución)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

    - Sea Δ el determinante de la matriz de coeficientes.
    - $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$
      - Y sean:
    - $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots, \Delta_n$
    - los determinantes que se obtiene al sustituir los coeficientes del 2º miembro (los términos independientes) en la 1ª columna , en la 2ª columna, en la 3ª columna y en la enésima columna respectivamente.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \cdots \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & b_m & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & b_m & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta} \cdots \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & b_m \end{vmatrix}}{\Delta}$$